

(3) 第一步: 由(2)知直线 CD 的方程, 表示 $|y_1 - y_2|$

由(2)知, 直线 $CD: x = ty + 1$, 所以 $(8t^2 + 9)y^2 + 16ty - 64 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{16t}{8t^2 + 9}, y_1 y_2 = -\frac{64}{8t^2 + 9}$,

所以 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(-\frac{16t}{8t^2 + 9}\right)^2 - 4 \times \frac{-64}{8t^2 + 9}} = 48 \sqrt{\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2}}$,

$$\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2} = \frac{t^2 + 1}{[8(t^2 + 1) + 1]^2} = \frac{1}{64(t^2 + 1) + \frac{1}{t^2 + 1} + 16}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

第二步: 利用对勾函数的性质求得最值

当 $t = 0$ 时, $64(t^2 + 1) + \frac{1}{t^2 + 1} + 16$ 取得最小值 $64 + 1 + 16 = 81$,

此时 $\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2}$ 取得最大值 $\frac{1}{81}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

所以 $|y_1 - y_2|_{\max} = 48 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$,

所以四边形 $ACBD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \times |y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{16}{3} = 16$,

所以四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 16. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

趋势预测 圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题以及几何图形的面积最值(范围)问题是高考的重点与难点, 特点是计算量大, 需要一定的解题技巧. 本题考查直线与椭圆的位置关系, 研究直线过定点以及四边形面积的最值问题, 解题时可考虑从特殊到一般的方法求解.

▶ 第(3)问 6 分, 分成变形整理 $|y_1 - y_2|$ 的表达式(3 分) 面积(3 分) 两个部分给分

▶ 用 t 的代数式表示 $|y_1 - y_2|$, 给 1 分

▶ 利用对勾函数性质求得最值, 给 1 分

▶ 求得四边形面积的最大值, 给 2 分

2025 年全国高考名校名师联席命制
 数学信息卷(三)

信息卷(三)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	B	D	B	C	B	C	A	ABD	AB	ABD	$2 \frac{1}{64}$	$\sqrt{5}$	72

1. D 【热点考】复数的概念与复数的模

【深度解析】若 $z = a^2 - 1 + (a + 1)i (a \in \mathbf{R})$ 为纯虚数, 则 $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = 1$, 则 $z = 2i$, 则 $|z| = 2$. 故选 D.

2. B 【热点考】向量的数量积、向量夹角的计算、垂直关系的向量表示

【深度解析】设 a, b 的夹角为 θ , 因为 $(4a - b) \perp (a + 3b)$, 且 a, b 为单位向量, 所以 $(4a - b) \cdot (a + 3b) = 4a^2 - 3b^2 + 11a \cdot b = 4 - 3 + 11 \times 1 \times 1 \times \cos \theta = 1 + 11 \cos \theta = 0$, 所以 $\cos \theta = -\frac{1}{11}$. 故选 B.

3. D 【热题型】判断命题的充分、必要条件, 根据存在量词命题的真假求参数范围

【深度解析】若 $\exists x \in [-1, 2], \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} - a \geq 0$, 则 $a \leq \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right)_{\max}, x \in [-1, 2]$. 令 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}, x \in [-1, 2]$, 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 的最大值是 $f(2) = \frac{5}{2}$, 则 $a \leq \frac{5}{2}$, 则 $a \leq \frac{5}{2}$ 的一个必要不充分条件是 $a \leq 3$. 故选 D.

4. B 【热点考】众数、中位数、平均数、方差

【深度解析】若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 9.9, 9.9, 9.9, 9.9, 9.7, 去掉两个最高分与两个最低分后评分为 9.9, 9.9, 9.9, 两组数据的中位数都为 9.9, 故 A 错误; 若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 9.9, 9.9, 9.9, 9.8, 9.7, 去掉两个最高分与两个最低分前平均数为 $\bar{x} = \frac{1}{7} \times (10 + 10 + 9.9 + 9.9 + 9.9 + 9.8 + 9.7) \approx 9.89$, 去掉两个最高分与两个最低分后平均数为 $\bar{x}' = \frac{1}{3} \times (9.9 + 9.9 + 9.9) = 9.9$, 故 C 错误; 若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 10, 9.9, 9.9, 9.8, 9.8, 此时众数为 10, 去掉两个最高分与两个

评分细则

▶ 失分注意
忽视 $a + 1 \neq 0$ 致误

▶ 高分关键
向量垂直可以转化为两向量的数量积为 0

▶ 失分注意
正确理解充分条件和必要条件, 在题干条件下若求真命题的一个必要不充分条件, 则 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ 是 a 的取值范围的真子集; 而若求真命题的一个充分不必要条件, 则 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ 的真子集

最低分后评分为 10,9,9,9,9,众数为 9.9,故 D 错误;

若 7 个裁判的评分分别为 10,10,10,10,10,10,10,去掉两个最高分与两个最低分前后平均数都为 10,方差都为 0,故 B 正确. 故选 B.

5. C 【热点】圆与圆的位置关系、动点的轨迹方程

【深度解析】设 $P(x_0, y_0)$, 由 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OQ}$, 可得 $\vec{OQ} = \vec{OP} - \vec{OA}$, 所以点 Q 的坐标为 $(x_0 - 2, y_0)$, 设点 Q 的坐标为 (x, y) , 则 $\begin{cases} x = x_0 - 2, \\ y = y_0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_0 = x + 2, \\ y_0 = y, \end{cases}$ 把 $P(x + 2, y)$ 的坐标代入圆 O 的方程, 得点 Q 的轨迹 E 的方程为 $(x + 2)^2 + y^2 = 1$, 即 E 是圆心为 $(-2, 0)$, 半径为 1 的圆, 由于两圆的圆心距与两圆的半径和相等, 因此两圆外切, 即 E 为与圆 O 相切的圆. 故选 C.

一题多解 (参数方程法) 设 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, θ 为参数, $Q(x, y)$, 由 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OQ} = (x + 2, y)$, 可得 $\begin{cases} x = \cos \theta - 2, \\ y = \sin \theta, \end{cases}$ 消去参数得点 Q 的轨迹 E 的方程为 $(x + 2)^2 + y^2 = 1$, 表示以 $(-2, 0)$ 为圆心, 半径为 1 的圆, 两圆圆心距为 2, 等于两圆半径和, 所以两圆外切. 故选 C.

快解 (数形结合法) 由 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OQ}$, 可得 $\vec{AP} = \vec{OQ}$, 根据向量的平移可知, 点 Q 的轨迹即由点 P 的轨迹向左平移 2 个单位长度得到, 所以点 Q 的轨迹 E 的方程为 $(x + 2)^2 + y^2 = 1$, 即 E 是圆心为 $(-2, 0)$, 半径为 1 的圆, 由于两圆的圆心距与两圆的半径和相等, 因此两圆外切, 即 E 为与圆 O 相切的圆. 故选 C.

6. B 【热点】抛物线定义的理解、直线与抛物线相交的相关问题

【深度解析】因为抛物线 C 的焦点到准线的距离为 2, 故 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 焦点坐标为 $F(1, 0)$, 设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 不妨设 $y_1 > 0 > y_2$,

联立方程 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = ty + 1, \end{cases}$ 整理得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$, $\Delta > 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4t$, $y_1 y_2 = -4$, 故 $x_1 x_2 =$

$\frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1$ (另解: 设直线 l 与抛物线的交点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 又

直线 l 过抛物线焦点, 所以 $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} = 1$, $y_1 y_2 = -p^2 = -4$),

又 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = x_1 + 1$, $|BF| = x_2 + \frac{p}{2} = x_2 + 1$, 则 $2|AF| + 3|BF| = 2(x_1 + 1) + 3(x_2 + 1) = 2x_1 + 3x_2 +$

$5 \geq 2\sqrt{6x_1 x_2} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$, 当且仅当 $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立, 故 $2|AF| + 3|BF|$ 的最小值为

$2\sqrt{6} + 5$ (另解: $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} = 1$, 因此 $2|AF| + 3|BF| = (2|AF| +$

$3|BF|)(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}) = 5 + \frac{3|BF|}{|AF|} + \frac{2|AF|}{|BF|} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{3|BF|}{|AF|} \cdot \frac{2|AF|}{|BF|}} = 5 + 2\sqrt{6}$, 当且仅当 $|AF| =$

$1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|BF| = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立, 故 $2|AF| + 3|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6} + 5$). 故选 B.

快解 利用二级结论: $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}$, 可得 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = 1$, 利用权方和不等式 $1 = \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2|AF|} + \frac{3}{3|BF|} \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{2|AF| + 3|BF|}$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{2}}{2|AF|} = \frac{\sqrt{3}}{3|BF|}$, 即 $|AF| = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, $|BF| = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立, 则 $2|AF| + 3|BF| \geq 2\sqrt{6} + 5$. 故选 B.

方法速记 (1) 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$, $y_1 y_2 = -p^2$;

(2) 权方和不等式: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{x + y} (a, b, x, y > 0)$, 当且仅当 $\frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\sqrt{b}}{y}$ 时等号成立.

7. C 【热题】锥体的外接球问题

【深度解析】因为 PA, PB, PC 两两垂直, 所以正三棱锥 $P-ABC$ 的外接球就是所在正方体的外接球. 如图, 外接球的球心即为正方体的中心 O , 正方体的体对角线就是外接球的直径. 设正方体

高分关键

求点的轨迹方程时, “求谁设谁”是最直接的方法

高分关键

参数方程法, 利用同角三角函数基本关系 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 求解轨迹方程

高分关键

利用向量的平移知识可以直接得到点 Q 的轨迹方程

高分关键

正确应用抛物线的定义, 抛物线上的点到焦点的距离等于该点到准线的距离

高分关键

使用基本不等式时, 常用常数“1”的代换的方法

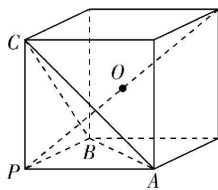
高分关键

二级结论的正确使用: 若 AB 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点弦, 则 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}$

高分关键

利用补形法确定外接球的球心, 关键在于判断正三棱锥为正方体的一部分

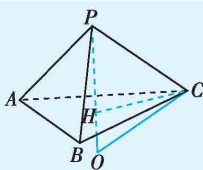
的棱长为 a , 外接球的半径为 R , 则 $\sqrt{3}a = 2R = 2\sqrt{3}$, 即 $a = 2$, 即 $PA = PB = PC = 2, AB = AC = BC = 2\sqrt{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 h , 由 $V_{P-ABC} = V_{C-ABP}$, 得 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABP} \cdot PC$, 所以 $h = \frac{S_{\triangle ABP} \cdot PC}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2 \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以球心 O 到平面 ABC 的距离为 $R - h = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.



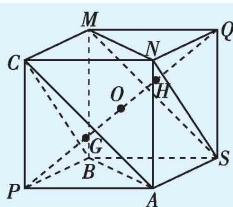
高分关键

利用等体积法(选择同一几何体的不同底和对应高求其体积), 表示出点 P 到平面 ABC 的距离

一题多解 如图, H 为等边三角形 ABC 的中心, 连接 PH, HC , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心 O 在直线 PH 上, 连接 OC , 设 $PA = PB = PC = a$, 则 $AB = AC = BC = \sqrt{2}a, CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}a \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}a, PH = \sqrt{PC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, OH = OP - PH = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}a$ (或 $OH = PH - OP = \frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}$), 在 $\text{Rt} \triangle OHC$ 中, $OH^2 + HC^2 = OC^2$, 即 $\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 = 3$ (或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 = 3$), 解得 $a = 2$ ($a = 0$ 舍去), 所以 $OH = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.



快解 因为 PA, PB, PC 两两垂直, 所以正三棱锥 $P-ABC$ 为正方体的一部分, 它的外接球就是该正方体的外接球, 如图, 外接球的球心即为正方体的中心 O , 正方体的体对角线就是外接球的直径, 即 $PQ = 2\sqrt{3}$. 易证平面 $ABC \parallel$ 平面 MNS , 设体对角线 PQ 交平面 ABC 于点 G , 交平面 MNS 于点 H , 由正方体的性质知 $PG = GH = HQ = 2OG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $OG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 易证 $PQ \perp$ 平面 ABC , 所以球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.



8. A 【热题型】利用同构思想、导数求函数(不含参)的最值及研究不等式恒成立问题

【深度解析】 因为 $f(x) = e^{mx} + mx - x - \ln x = e^{mx} + mx - (e^{\ln x} + \ln x)$, 对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) \geq 0$, 所以 $e^{mx} + mx \geq e^{\ln x} + \ln x$ 恒成立. 令 $h(x) = e^x + x$, 易知 $h(x) = e^x + x$ 在定义域上单调递增,

所以 $mx \geq \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 也即 $m \geq \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 由 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$; 由 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e$,

即 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增, 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 则在 $x = e$ 处取得极大值,

也是最大值, 所以 $g(x) \leq \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$, 所以 $m \geq \frac{1}{e}$. 故选 A.

关键点拨 同构是本题求解的核心, 一种解法是同构成指数型函数形式, $f(x) = e^{mx} + mx - x - \ln x = e^{mx} + mx - (e^{\ln x} + \ln x)$, 构造函数 $h(x) = e^x + x$; 另一种解法是同构成对数型函数形式, $f(x) = e^{mx} + \ln e^{mx} - (x + \ln x)$, 构造函数 $\varphi(x) = x + \ln x$, 然后都将问题转化成 $m \geq \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 再构造函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求出 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的最大值, 即可求解.

9. ABD 【热题型】椭圆的标准方程、与椭圆相关的最值问题

【深度解析】 由题意可知, $\begin{cases} 2a = 6, \\ \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ c = 2, \end{cases}$ $\therefore |PF| + |PF'| = 2a = 6$, 故 A 正确;

$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$, \therefore 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, 故 B 正确;

高分关键

另解: 同构为 $e^{mx} + \ln e^{mx} \geq x + \ln x$, 因为函数 $\varphi(x) = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $e^{mx} \geq x$, 不等式两边同时取对数, 得 $mx \geq \ln x$, 即 $m \geq \frac{\ln x}{x}$, 后同深度解析

$\therefore F'(2,0), \therefore |AF'| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, 故 C 错误;

$|PA| + |PF| = |PA| + 2a - |PF'| \leq 2a + |AF'| = 6 + \sqrt{2}$, 当且仅当 F' 在 A, P 之间且三点共线时等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

10. AB 【热考点】三角函数图象的综合应用

【深度解析】对于 A, 由图象可知, $\left|f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\right| = \frac{2\sqrt{2}+1}{2}$, 所以 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$. 结合 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$ 及图象可得 $f(0) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, 解得 $f(0) = -1$, 所以 $\sqrt{2} \sin \varphi = -1$, 即 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 又 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi\omega}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 所以 $\frac{3\pi\omega}{8} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\omega = \frac{16}{3}k + 2 (k \in \mathbb{Z})$, 又 $0 < \omega \leq 2$, 所以当 $k=0$ 时, $\omega=2$, 所以 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 故 A 正确;

对于 B, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到 $y = f\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \sin\left[2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin(2x - \pi) = -\sqrt{2} \sin 2x$ 的图象, 该函数图象关于原点对称, 所以新函数为奇函数, 故 B 正确;

对于 C, $h(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $h(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, 1\right) (k \in \mathbb{Z})$, 故 C 错误;

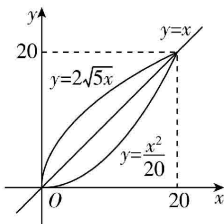
对于 D, 由 $f(x) = 1$, 解得 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $x \in (0, m)$, 所以 $2x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 2m - \frac{\pi}{4}\right)$, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}$, 解得 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$, 又 $f(x) = 1$ 在 $(0, m)$ 上有且只有 6 个根, 则根从小到大依次为 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$, 所以若存在第 7 个根, 则 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi}{4}$, 解得 $x = \frac{13\pi}{4}$, 所以 $m \in \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{13\pi}{4}\right]$, 故 D 错误. 故选 AB.

11. ABD 【热风向】取整函数的理解

【深度解析】对于 A, 若 $x \in (0, 1)$, 则 $-x \in (-1, 0)$, 则 $f(-x) + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$, $-[f(x) + \frac{1}{3}] = -(0 + \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$, 所以 $f(-x) + \frac{1}{3} < -[f(x) + \frac{1}{3}]$, 故 A 正确.

对于 B, 设 $x = [x] + k_1, y = [y] + k_2, k_1, k_2 \in [0, 1)$, 则 $[x+y] = [[x] + [y] + k_1 + k_2] = [x] + [y] + [k_1 + k_2]$, 又 $k_1 + k_2 \in [0, 2)$, 所以 $[k_1 + k_2] \in \{0, 1\}$, 所以 $[x+y] \geq [x] + [y]$, 即 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, 故 B 正确.

对于 C, 因为 $f(2\sqrt{5x}) = f(\sqrt{20x})$, 而 $[\sqrt{20 \times 1}] + [\sqrt{20 \times 2}] + [\sqrt{20 \times 3}] + \dots + [\sqrt{20 \times 20}]$ 表示 x 轴、直线 $x=20$ 及曲线 $y = \sqrt{20x}$ 所围成区域的整点 (横、纵坐标均为整数的点) 的个数 (不含 x 轴上的点), 设函数 $y = \frac{x^2}{20}$ 和 $y = 2\sqrt{5x}$, 可得函数 $y = \frac{x^2}{20}$ 和 $y = 2\sqrt{5x}$ 互为反函数, 即两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称, 由函数图象的对称性可得 y 轴、直线 $y=20$ 及曲线 $y = 2\sqrt{5x}$ 围成的区域与以 x 轴、直线 $x=20$ 及曲线 $y = \frac{x^2}{20}$ 围成的区域所包含的整点个数相同, 如图所示,



其中曲线 $y = 2\sqrt{5x}$ 上的整点有 $(20, 20), (5, 10)$, 曲线 $y = \frac{x^2}{20}$ 上的整点有 $(20, 20), (10, 5)$, 且

不是坐标轴上的点, 所以 $\sum_{k=1}^{20} g(k) = 20 \times 20 + 2 = 402$, 故 C 错误.

对于 D, 当 $m \in [0, 1)$ 时, $n \in [0, 1), f(m) = f(n) = 0$, 此时 (m, n) 组成区域的面积为 1;

当 $m \in [1, 2)$ 时, $n \in [1, 2), f(m) = f(n) = 1$, 此时 (m, n) 组成区域的面积为 1;

当 $m \in [2, 3)$ 时, $n \in [2, 3), f(m) = f(n) = 2$, 此时 (m, n) 组成区域的面积为 1;

当 $m \in [3, 4)$ 时, $n \in [3, 4), f(m) = f(n) = 3$, 此时 (m, n) 组成区域的面积为 1;

高分关键

利用椭圆的定义与三角形的三边关系进行判断

失分注意

函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 所以解含绝对值的方程时 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -(\sqrt{2}+1)$ 舍去

高分关键

ω 的取值结果和 k 相关, 根据题设对 ω 范围的限制, 对 k 进行正确赋值

失分注意

当 $\omega \neq 1$ 时, 左、右平移变换时, 需要注意先将 ω 提出来, 再对 x 进行加减运算

失分注意

将函数图象进行上、下平移变换时, 其对称中心也相应进行上、下平移

失分注意

因为 $x \in (0, m)$, 所以 m 取值区间左端点值不能取到, 右端点值能取到

高分关键

要发现函数 $y = \frac{x^2}{20}$ 和 $y = 2\sqrt{5x}$ 互为反函数, 才能抓住图形的对称性, 进而快速地解决问题

当 $m \in \left[4, \frac{14}{3}\right]$ 时, $n \in \left[4, \frac{14}{3}\right]$, $f(m) = f(n) = 4$, 此时 (m, n) 组成区域的面积为 $\left(\frac{14}{3} - 4\right) \left(\frac{14}{3} - 4\right) = \frac{4}{9}$. 综上, 点 (m, n) 组成区域的面积为 $1 \times 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

考法解读 新定义题主要分为两类, 一类是概念新定义型, 主要是以新概念为背景, 通常考查对新概念的理解; 二是性质新定义型, 主要是以新性质为背景, 重点考查运用题设性质的能力, 对材料整合加工的能力. 本题以取整函数为设题背景, 考查函数的性质.

12.2 $\frac{1}{64}$ 【热考点】等比数列的性质及应用、等差中项、等比数列的前 n 项积

【深度解析】 由已知可得 $a_3 a_5 = a_4^2 = 1$, 又 $a_n > 0$, 所以 $a_4 = 1$, 又 $a_4 + a_6 = 5$, 即 $1 + q^2 = 5$, 解得 $q = 2$ (负值舍去). 因为 $a_4 = 1, q = 2$, 所以 $a_n = 2^{n-4}$, 从而 $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^{-3} \cdot 2^{-2} \cdot \cdots \cdot 2^{n-4} = 2^{\frac{n(n-7)}{2}}$, 因为当 $n = 3$ 或 $n = 4$ 时, $\frac{n(n-7)}{2}$ 取最小值 -6 , 所以 $2^{\frac{n(n-7)}{2}}$ 的最小值为 $2^{-6} = \frac{1}{64}$, 即 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 $\frac{1}{64}$.

13. $\sqrt{5}$ 【热考点】正弦定理的应用, 用和角、差角的正弦公式化简、求值

【深度解析】 由正弦定理得, $\sin B \cos B = (\sin C \cos B + \sin B \cos C) \cos A = \sin(B+C) \cos A = \sin A \cos A$, 所以 $\sin 2B = \sin 2A$, 所以 $2B = 2A$ 或 $2A + 2B = \pi$, 即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$.

因为 $a \neq b$, 所以 $A \neq B$, 所以 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

快解 因为 $c \cos B + b \cos C = a$ (提示: 利用正弦定理和两角和的正弦公式可以证明), 代入已知条件可得 $b \cos B = a \cos A$, 由正弦定理得 $\sin B \cos B = \sin A \cos A$, 后同深度解析.

一题多解 因为 $c \cos B + b \cos C = a$, 代入已知条件可得 $b \cos B = a \cos A$, 利用余弦定理可得 $b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 进而 $b^2(a^2 + c^2 - b^2) = a^2(b^2 + c^2 - a^2)$, 又 $a = 1, b = 2$, 所以 $c^2 = 5$, 则 $c = \sqrt{5}$.

14. 72 【热风向】排列、组合的综合应用, 分步乘法计数原理及其简单应用

【深度解析】 首先对 3×3 的九宫格每个位置标注数字, 如图所示, 第一步先排 $(0, 0)$, 一共 9 个位置, 因此有 C_9^1 种排法, 根据对称性知, $(0, 0)$ 所在的行和列只能排 $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$, 不妨设 $(0, 0)$ 在 1 位置;

1	2	3
4	5	6
7	8	9

第二步排 2 位置, 则从 $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$ 中选一个, 因此有 C_4^1 种排法, 则 3 位置的向量可以唯一确定;

第三步排 4 位置, 则从 $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$ 剩余的两个中挑一个, 因此有 C_2^1 种排法,

接着排 7 位置, 7 位置是 $(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$ 中剩余的最后一个, 此时 $(0, 0)$ 所在的行和列都确定了, 若使得每行、每列各三个向量的和为零向量, 则其他四个位置的向量排法是唯一的, 因此按分步乘法计数原理知, 不同的填法共有 $C_9^1 \times C_4^1 \times C_2^1 = 72$ (种), 因此共有 72 种填法.

真题溯源 在 2024 年全国新课标 II 卷中出现分割数表问题, 以新的设题方式考查排列组合知识和学生对问题的分析能力. 本题以数表和平面向量为设题背景, 类比真题设计考查背景, 深入考查排列组合知识, 解题关键在于根据数据的特点, 判断出数据会呈现对称性排列.

15. (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{81}{128}$

【热素材】 互斥事件的概率加法公式、独立事件的概率乘法公式

【解】 (1) 第一步: 确定乙仅参加两场比赛且连负两场的事件情况

乙仅参加两场比赛且连负两场, 即乙在第 1 场、第 4 场均负, 2 分

第二步: 计算概率

所以乙仅参加两场比赛且连负两场的概率为 $P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 6 分

► 高分关键

将指数位置的二次函数单独分析, 确定其最值

► 失分注意

解 $\sin 2B = \sin 2A$ 时, 容易忽略 $2A + 2B = \pi$ 的情况

► 高分关键

解三角形题目, 边角互化有两个变形方向: 一个是化成角的三角函数之间的关系, 通过三角函数和角、差角公式求解; 另一个是化成三角形边之间的关系, 利用公式、多项式变形等求解运算

► 高分关键

根据数据本身的特性, 明确数据之间摆放的对称性

► 第(1)问 6 分, 分成比赛情况(2 分)概率(4 分)两个部分给分

(2) 第一步:分析甲获得冠军的比赛情况

甲获得冠军,则甲参加的比赛结果有三种情况:

1胜3胜6胜;1负4胜5胜6胜;1胜3负5胜6胜, 9分

第二步:计算每种情况的概率

其中,1胜3胜6胜的概率为 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$;1负4胜5胜6胜的概率为 $\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$;1胜3负5胜6胜的概率为 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$, 12分

第三步:计算甲获得冠军的概率

所以甲获得冠军的概率为 $P_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{81}{128}$ 13分

16. (1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【热题型】空间几何体中的线面关系、线面角正弦值的求解

(1) 【证明】第一步:根据线面平行的性质定理证明 $PM \parallel AQ$

连接 AQ , 因为 $PM \parallel$ 平面 ABC , $PM \subset$ 平面 ADQ , 2分

平面 $ADQ \cap$ 平面 $ABC = AQ$, 所以 $PM \parallel AQ$, 4分

第二步:证得结论

又因为 P 是 AD 的中点, 所以 M 是 DQ 的中点 (提示: 三角形中位线定理的逆用). 5分

(2) 【解】解法一 (向量法):

第一步:建系,表示点和向量的坐标

因为 $AD \perp$ 底面 BCD , $BC \perp CD$, 所以以 CD, CB 所在直线分别为 x, y 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0)$, $D(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $A(2, 0, 2)$, $Q(0, 1, 0)$,

可得 $\overrightarrow{DQ} = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 2)$, $\overrightarrow{CB} = (0, 2, 0)$, 7分

第二步:求平面 ABC 的法向量

设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 2x + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 2y = 0, \end{cases}$

令 $x = -1$, 则 $y = 0, z = 1$, 所以平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$ 10分

第三步:计算直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值

$\cos \langle \overrightarrow{DQ}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{DQ} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{DQ}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 13分

设直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DQ}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 15分

解法二 (几何法):

第一步:找到直线 DQ 与平面 ABC 所成角

取 AC 的中点 N , 连接 DN, QN , 因为 $DA = DC$, 所以 $DN \perp AC$.

因为 $AD \perp$ 平面 BCD , $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $AD \perp BC$, 7分

又 $BC \perp CD$, $AD \cap CD = D$, $AD, CD \subset$ 平面 ACD ,

所以 $BC \perp$ 平面 ACD 9分

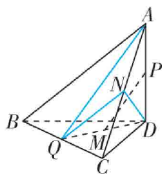
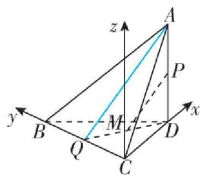
又 $DN \subset$ 平面 ACD , 所以 $BC \perp DN$.

又 $AC \cap BC = C$, $AC, BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DN \perp$ 平面 ABC , 12分

可知 $\angle DQN$ 即为直线 DQ 与平面 ABC 所成角. 13分

第二步:计算直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值

又 $DN = \sqrt{2}$, $DQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, 则 $\sin \angle DQN = \frac{DN}{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,



第(2)问7分,分成赛况(3分)概率(3分)甲获胜概率(1分)三个部分给分

3个概率,1个1分,写错不得分

列式与结果全部正确,给1分,错误不得分

第(1)问5分,分成线线平行(4分)结论(1分)两个部分给分

证得结论,给1分

第(2)问10分,分成建系写坐标(2分)求法向量(3分)计算线面角正弦值(5分)三个部分给分

设出法向量,列出方程组,各给1分

不同赋值得到不同法向量,正确给1分

结果正确,给3分,结果未化简也给分

转化为线面角的正弦值,给2分,结果未化简也给分

第(2)问10分,分为确定线面角(8分)计算正弦值(2分)两个部分给分

线面垂直,给2分,未写 $AC \cap BC = C$,只给1分

正确找到线面所成角,给1分

所以直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 15 分

解法三(等体积法):

第一步:以 $\triangle BCD$ 做底面求三棱锥体积

设点 D 到平面 ABC 的距离为 d , 可得 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$ 8 分

第二步:等体积法表示三棱锥 $D-ABC$ 的体积, 解出 d

因为 $AD \perp$ 底面 BCD , $BC \subset$ 底面 BCD , 所以 $AD \perp BC$, 又 $BC \perp CD$, $AD \cap CD = D$, $AD, CD \subset$ 平面 ACD , 所以 $BC \perp$ 平面 ACD , 又 $AC \subset$ 平面 ACD , 所以 $BC \perp AC$,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 10 分

即 $V_{A-BCD} = V_{D-ABC} = \frac{1}{3}d \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}d = \frac{4}{3}$ (提示:等体积法求点到平面的距离), 解得 $d = \sqrt{2}$.

..... 13 分

第三步:计算直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值

$DQ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, 所以直线 DQ 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{d}{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 15 分

17. (1) 3 5 $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ (2) $S_n = (4n - 7) \times 2^{n+1} + 14$

【热题型】由递推关系式求通项公式、错位相减法求和

【解】(1) **第一步:**计算 a_2, a_3

因为 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 8n, a_1 = 1, a_n > 0$,

所以当 $n = 1$ 时, $a_2^2 - a_1^2 = 8, a_2^2 = a_1^2 + 8 = 9$, 解得 $a_2 = 3$;

当 $n = 2$ 时, $a_3^2 - a_2^2 = 8 \times 2, a_3^2 = a_2^2 + 16 = 25$, 解得 $a_3 = 5$ 4 分

第二步:根据数列的递推关系, 求 $n \geq 2$ 时 $\{a_n\}$ 的通项公式

当 $n \geq 2$ 时, $a_n^2 = (a_n^2 - a_{n-1}^2) + (a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2) + \cdots + (a_2^2 - a_1^2) + a_1^2$
 $= 8(n-1) + 8(n-2) + \cdots + 8 \times 1 + 1 = 8[1+2+\cdots+(n-1)] + 1 = 8 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (2n-1)^2$,

所以 $a_n = 2n - 1$ 6 分

第三步:检验 $n = 1$ 时是否符合通项, 得出结论

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 也符合上式.

综上, $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ 7 分

一题多解 (1) **第一步:**计算 a_2, a_3

因为 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 8n, a_1 = 1, a_n > 0$, 所以当 $n = 1$ 时, $a_2^2 - a_1^2 = 8, a_2^2 = a_1^2 + 8 = 9$, 所以 $a_2 = 3$;

当 $n = 2$ 时, $a_3^2 - a_2^2 = 8 \times 2, a_3^2 = a_2^2 + 16 = 25$, 所以 $a_3 = 5$ 4 分

第二步:根据数列的递推关系求通项公式

因为 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 8n$, 所以 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2n+1)^2 - (2n-1)^2$, 即 $a_{n+1}^2 - (2n+1)^2 = a_n^2 - (2n-1)^2$.

所以 $a_n^2 - (2n-1)^2 = a_{n-1}^2 - (2n-3)^2 = \cdots = a_1^2 - 1 = 0$, 即 $a_n^2 = (2n-1)^2$.

又 $a_n > 0$, 所以 $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ 7 分

(2) **第一步:**列出分段数列 $\{b_n\}$ 的通项公式

由(1)得, $b_n = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ 为奇数}, \\ 2^{\frac{2n-1+1}{4}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以 $b_n = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ 为奇数}, \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 9 分

第二步:错位相减法求和

则 $S_n = b_1 b_2 + b_3 b_4 + b_5 b_6 + \cdots + b_{2n-1} b_{2n}$,

即 $S_n = 1 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + 9 \times 2^3 + \cdots + (4n-7) \cdot 2^{n-1} + (4n-3) \cdot 2^n$,

$2S_n = 1 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + 9 \times 2^4 + \cdots + (4n-7) \cdot 2^n + (4n-3) \cdot 2^{n+1}$, 11 分

两式作差得 $-S_n = 1 \times 2^1 + 4 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + 4 \times 2^n - (4n-3) \cdot 2^{n+1}$

$= 2 + 4 \times \frac{2^2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (4n-3) \cdot 2^{n+1}$, 13 分

故 $S_n = (4n-7) \cdot 2^{n+1} + 14$ 15 分

▶ 正确得出结论, 给 1 分, 不写不得分, 结果未化简也给分

▶ 第(2)问 10 分, 分为求体积(3 分)求距离(5 分)求正弦值(2 分)三个部分给分

▶ 三棱锥顶点转化, 列出体积等式, 结果正确, 1 个 1 分, 写错部分不得分

▶ 结果正确, 给 2 分, 未化简也给分

▶ 第(1)问 7 分, 分成 a_2 (2 分) a_3 (2 分) 通项(2 分) 检验(1 分)四个部分给分

▶ 列式正确, 各给 1 分; 计算出 a_2 与 a_3 , 各给 1 分, 错误不得分

▶ 列出等式, 给 1 分

▶ 正确得到通项公式, 给 1 分

▶ 验证 $n = 1$ 时的情况, 给 1 分, 未验证不得分

▶ 列出等式, 给 1 分

▶ 通项公式正确, 给 2 分

▶ 第(2)问 8 分, 分成 $\{b_n\}$ 通项(2 分) 错位相减(4 分) 化简结果(2 分)三个部分给分

▶ 数列 $\{b_n\}$ 通项公式, 给 2 分; 正确一个, 给 1 分

▶ 正确书写 S_n , 给 1 分

▶ 正确书写 $2S_n$, 给 1 分

▶ 正确作差, 给 2 分; 若用 $2S_n - S_n$, 列式正确也给分

▶ 结果正确, 给 2 分; 未化简, 只给 1 分

18. (1)2 (2)见解析 (3)见解析

【热题型】已知切线(斜率)求参数、利用导数证明不等式、利用导数研究方程的根、分类讨论求含参函数的单调区间、隐零点问题

(1)【解】第一步:求导,表示切线斜率

因为 $f(x)=x-a\ln x$,所以 $f'(x)=1-\frac{a}{x}$,所以 $f'(1)=1-a$, 2分

第二步:根据斜率相等,求 a

又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+2$,因而 $1-a=-1$,解得 $a=2$ 4分

(2)【解】第一步:求导

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ 6分

第二步:分类讨论 a 的不同取值时 $f(x)$ 的单调区间

当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$,无单调递减区间; 7分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=a$,

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, a)$,单调递增区间为 $(a, +\infty)$ 9分

第三步:得出结论

综上,当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$,无单调递减区间;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, a)$,单调递增区间为 $(a, +\infty)$ 10分

(3)【证明】第一步:分类讨论当 a 取不同数值时 $f(x)$ 的零点个数

由(2)知:

①当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)=0$ 至多有一个实根,不符合题意. 11分

②当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的极小值即为最小值,为 $f(a)=a-a\ln a$.

若 $f(a)\geq 0$,则 $f(x)\geq 0$,所以 $f(x)=0$ 至多有一个实根,不符合题意;

若 $f(a)<0$,即 $a-a\ln a<0$,解得 $a>e$,

又 $f(1)=1>0$,且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上有唯一零点. 14分

第二步:确定 x_0 的取值范围

因为方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根,且较小的实数根为 x_0 ,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上的唯一零点就是 x_0 ,

所以 $x_0-a\ln x_0=0$,且 $f(1)=1>0$,所以 $x_0\in(1, a)$,所以 $a=\frac{x_0}{\ln x_0}$ 15分

解法一:第三步:证明结论

所以“ $(a-1)x_0>a$ ”等价于“ $\left(\frac{x_0}{\ln x_0}-1\right)x_0>\frac{x_0}{\ln x_0}$ ”,即 $x_0-\ln x_0>1$, 16分

由(2)知,当 $a=1$ 时, $f(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $f(1)=1$.

又因为 $x_0\neq 1$,所以 $x_0-\ln x_0>1$,即证得 $(a-1)x_0>a$ 17分

解法二:第三步:将不等式等价变形

“ $(a-1)x_0>a$ ”等价于“ $x_0>\frac{a}{a-1}$ ”.

又 $\frac{a}{a-1}-a=\frac{-a^2+2a}{a-1}=\frac{-a(a-2)}{a-1}<0$,所以 $\frac{a}{a-1}<a$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,所以“ $x_0>\frac{a}{a-1}$ ”等价于“ $f(x_0)<f\left(\frac{a}{a-1}\right)$ ”,

▶ 第(1)问4分,分成求导(2分)求 a (2分)两个部分给分

▶ 求导正确,给1分,正确计算 $f'(1)$,给1分

▶ 正确计算 a 的值,给2分

▶ 第(2)问6分,分成求导(2分)分类讨论(3分)总结(1分)三个部分给分

▶ 正确求导,给2分

▶ 正确得到单调区间,给1分;不写“无单调递减区间”,也给1分

注:写成在定义域内单调递增,也给1分

▶ 正确得到单调区间,1个1分;写错不得分

▶ 正确总结结论,给1分

▶ 第(3)问7分,分成对 a 讨论(4分)隐零点范围(1分)结论(2分)三个部分给分

▶ 正确讨论 $a\leq 0$,给1分;未写不得分

▶ 指出最小值,给1分

▶ 讨论 $f(a)\geq 0$,给1分;未讨论不给分

▶ 确定零点存在,给1分;没有不得分

▶ 写出 $x_0\in(1, a)$,给1分

▶ 正确转化,给1分;错误不得分

▶ 证得结论,给1分;未写 $x_0\neq 1$ 扣1分

即 $f\left(\frac{a}{a-1}\right) = \frac{a}{a-1} - a \ln \frac{a}{a-1} > 0$ (*), 因为 $a > e$, 令 $t = \frac{a}{a-1}$, 则 $t > 1, a = \frac{t}{t-1}$,

即(*)等价于 $t - \frac{t}{t-1} \ln t > 0$, 即 $t - 1 - \ln t > 0$.

所以“ $(a-1)x_0 > a$ ”等价于“ $t - 1 - \ln t > 0$ ”. 16分

第四步:利用导数研究函数最值

令 $g(t) = t - 1 - \ln t$, 则 $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$, 当 $t > 1$ 时, $g'(t) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $g(t) > g(1)$, 而 $g(1) = 0$, 所以 $t > 1$ 时, $t - 1 - \ln t > 0$ 恒成立, 所以 $(a-1)x_0 > a$ 17分

19. (1) $y=0$ 见解析 (2)见解析 (3) $\frac{4}{5}$

【热风向】空间曲面方程的概念、求平面轨迹方程、利用双曲线定义确认平面轨迹、异面直线夹角的向量求法

思路导引

(3) 设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是 l' 上一点,
 设 $d' = (a, b, c)$ 是 l' 的方向向量 $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标} \Rightarrow \text{点 } M \text{ 坐标代入} \Rightarrow \text{求 } d, d' \Rightarrow l \text{ 与 } l' \text{ 所成角的余弦值} \\ \text{曲面 } C \text{ 的方程} \Rightarrow \text{的夹角} \end{array} \right.$

(1)【解】第一步:写出坐标平面 xOz 的方程

根据坐标平面 xOz 内点的坐标的特征可知, 坐标平面 xOz 的方程为 $y=0$.

第二步:确定平面 xOz 与曲面 C 的交线的方程

已知曲面 C 的方程为 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1$,

当 $y=0$ 时, 平面 xOz 截曲面 C 所得交线上的点 $(x, 0, z)$ 满足 $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, 2分

第三步:得出结论

从而 xOz 平面截曲面 C 所得交线是在平面 xOz 上, 以原点 O 为对称中心, 焦点在 x 轴上, 实轴长为 2, 虚轴长为 4 的双曲线. 3分

(2)【证明】第一步:设点 P 在直线 l 上, 确定点 P 的坐标

设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 l 上任意一点, 由 $d = (1, 0, 2)$, \overrightarrow{QP} 均为直线 l 的方向向量, 得 $\overrightarrow{QP} // d$, 4分

从而存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{QP} = \lambda d$, 即 $(x_0 + 1, y_0 + 1, z_0 + 2) = \lambda(1, 0, 2)$,

则 $\begin{cases} x_0 + 1 = \lambda, \\ y_0 + 1 = 0, \\ z_0 + 2 = 2\lambda, \end{cases}$ 解得 $x_0 = \lambda - 1, y_0 = -1, z_0 = 2\lambda - 2$,

所以点 P 的坐标为 $(\lambda - 1, -1, 2\lambda - 2)$ 6分

第二步:证明结论

于是 $\frac{(\lambda-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} - \frac{(2\lambda-2)^2}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 - (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 1$,

因此点 P 的坐标总是满足曲面 C 的方程, 从而直线 l 在曲面 C 上(即 l 上任意一点均在曲面 C 上). 8分

一题多解 (2)第一步:确定直线 l 的方程

由已知直线 l 过点 $Q(-1, -1, -2)$, 方向向量 $d = (1, 0, 2)$,

因而直线 l 的方程为 $\frac{x+1}{1} = \frac{z+2}{2}, y = -1$, 6分

第二步:证明结论

所以 $z = 2x, y = -1$, 直线 l 上的点都适合曲面 C 的方程 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1$, 所以直线 l 在曲面 C 上(即 l 上任意一点均在曲面 C 上). 8分

► 不化简直接证明不扣分

► 证得结论, 给 1 分

► 第(1)问 3 分, 分成交线方程(2分)交线描述(1分)两个部分给分

► 轨迹方程正确, 给 1 分
注:若轨迹方程正确, 未写平面 xOz 的特征, 也给 2 分

► 正确描述双曲线, 给 1 分; 没有写清楚焦点、实轴长、虚轴长, 也给分

► 第(2)问 5 分, 分成设点求点(3分)由点在曲面上证得结论(2分)两个部分给分

► 正确表示向量共线关系, 给 1 分
► 正确求解点 P 坐标, 给 1 分
注:(1)未写计算过程, 也给分
(2)通过其他方法得出点 P 的坐标, 也给分

► 列式正确, 给 1 分; 未化简, 也给分

► 结论总结, 给 1 分, 不写不得分
► 第(2)问 5 分, 分为确定直线方程(3分)证明结论(2分)两个部分给分

► 直线方程正确, 给 3 分

► x, y, z 数量关系正确, 给 1 分
► 结论总结, 给 1 分, 不写不得分

(3)【解】第一步:设点 M 在直线 l' 上,求点 M 的坐标

直线 l' 在曲面 C 上,且过点 $T(1,0,0)$,

设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是直线 l' 上任意一点,直线 l' 的方向向量为 $d'=(a, b, c)$,

由 d', \overrightarrow{TM} 均为直线 l' 的方向向量,得 $\overrightarrow{TM} // d'$,

从而存在实数 t ,使得 $\overrightarrow{TM}=td'$,即 $(x_1-1, y_1, z_1)=t(a, b, c)$,

则
$$\begin{cases} x_1-1=at, \\ y_1=bt, \\ z_1=ct, \end{cases}$$
 解得 $x_1=1+at, y_1=bt, z_1=ct$,

所以点 M 的坐标为 $(1+at, bt, ct)$ 10 分

第二步:得到直线 l' 的方向向量

$\because M(x_1, y_1, z_1)$ 在曲面 C 上, $\therefore \frac{(1+at)^2}{1} + \frac{(bt)^2}{1} - \frac{(ct)^2}{4} = 1$,

整理得 $(a^2+b^2-\frac{c^2}{4})t^2+2at=0$, 12 分

由题意,对任意的 t ,有 $(a^2+b^2-\frac{c^2}{4})t^2+2at=0$ 恒成立,

$\therefore a^2+b^2-\frac{c^2}{4}=0$, 且 $2a=0$,

$\therefore c=2b$ 或 $c=-2b$,不妨取 $b=1$,则 $c=2$ 或 -2 ,

$\therefore d'=(0, 1, 2)$ 或 $d'=(0, 1, -2)$, 15 分

第三步:计算异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值

又直线 l 的方向向量为 $d=(1, 0, 2)$,

则异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值为 $\frac{|d \cdot d'|}{|d||d'|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$ 17 分

考法解读 在 2024 年全国新课标 I 卷中第 19 题出现了对数列新定义的考查,以新定义命题的模块可以有数列、函数与导数、圆锥曲线等. 本题以曲面方程为背景考查立体几何与双曲线的知识交汇,设题背景新颖,文字阅读量大,考查学生的阅读能力以及运用新材料解决问题的能力.

- ▶ 第(3)问 9 分,分成点 M 坐标(2 分)方向向量(5 分)异面直线所成角(2 分)三个部分给分
- ▶ 正确得到点 M 坐标,给 2 分
- ▶ 正确代入曲面 C 方程,给 1 分
- ▶ 整理化简,给 1 分,未化简不扣分
- ▶ 正确表示关系,给 1 分
- ▶ 2 个方向向量,1 个 1 分,错误不得分
- ▶ 结果正确,给 2 分;只写结果,未列式,也给分

2025 年全国高考名校名师联席命制
数学信息卷(四)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	B	A	A	C	A	B	C	ACD	AB	BD	64	$1-8a^2$	45 4 095

1. D 【热点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】由题知 $\bar{z} = \frac{3+5i}{1+i} = \frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 4+i$, 则 $z=4-i$, 所以 z 的虚部为 -1 . 故选 D.

2. B 【热点】集合的交集运算、指数函数的值域

【深度解析】由题知 $A=(-2, 3]$, 则 $B=\{y|y=2^x, x \in (-2, 3]\} = \{y|2^{-2} < y \leq 2^3\} = (\frac{1}{4}, 8]$, 所以

$A \cap B = (\frac{1}{4}, 3]$. 故选 B.

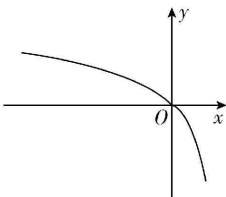
3. A 【热点】向量的坐标运算、向量垂直、向量的模

【深度解析】由题知 $c=a+2b=(1, m)+2(-2, 1)=(-3, m+2)$, 又因为 $c \perp b$, 所以 $c \cdot b = -3 \times (-2) + m+2=0$, 解得 $m=-8$, 所以 $a=(1, -8)$, 所以 $|a| = \sqrt{1^2+(-8)^2} = \sqrt{65}$. 故选 A.

4. A 【热题型】利用函数的单调性解不等式

【深度解析】因为 $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x > 0, \\ \ln(1-x), & x \leq 0, \end{cases}$ 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 且函数 $f(x)$ 的图象连续, 如图所示, 则 $f(x)$ 在

\mathbf{R} 上单调递减, 所以不等式 $f(x+3) < f(x^2+3x)$ 等价于 $x+3 > x^2+3x$, 即 $x^2+2x-3 < 0$, 解得 $-3 < x < 1$, 则原不等式的解集为 $(-3, 1)$. 故选 A.



评分细则

- ▶ 失分注意
虚部是虚数单位 i 的系数, 所以 $z=4-i$ 的虚部为 -1 , 而不是 $-i$
- ▶ 高分关键
将向量垂直转化为向量数量积为 0
- ▶ 高分关键
复合函数单调性的判断方法: 同增异减